6ο μάθημα
2/12/19

Μέθοδος των χαρακτηριστικών για εξισ. 2ου βαθμού

Θεωρούμε την εξίσωση: $Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = D$
οι συνιστ. A, B, C, D είναι πραγματικές συναρτ. των u, u_x, u_y, x, y

Τότε η εξίσωση $A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = D$

ορίζει τις χαρακτηριστικές του συστήματος.

Θεωρώντας $\lambda = \frac{dy}{dx}$:

$$A\lambda^2 - B\lambda + C = D$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(α) υπερβολικές εξισώσεις αν η εξίσωση έχει δύο διακριτές πραγματικές ρίζες

(β) παραβολικές εξισώσεις αν η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα

(γ) ελλειπτικές εξισώσεις αν η εξίσωση έχει μιγαδικές ρίζες.

Προφανώς οι χαρακτηριστικές δίνονται από την εξίσωση $\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4A(C-D)}}{2A}$

ΠΑΡΑΔ.: Η εξίσωση κύματος $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

- $A = -c^2$, $B = 0$, $C = 1$, $D = 0$
- $A = 1$, $B = 0$, $C = -c^2$, $D = 0$

Χαρακτηριστικές: • $\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\pm\sqrt{4c^2}}{-2c^2} = \mp \frac{1}{c} \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{x}{c} \\ t = \frac{x}{c} \end{cases}$

• $\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\pm\sqrt{4c^2}}{2} = \pm c \Rightarrow \begin{cases} x = ct \\ x = -ct \end{cases}$

άρα χαρακτηριστικές: $\xi_1 = x - ct$
$\xi_2 = x + ct$

κ. η εξίσωση μας γίνεται:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial t} = -c \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi_2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u}{\partial \xi_2}$$

$$\frac{d^2 u}{d t^2} = \frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial t}\right) \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial t} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial t}\right) \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi_1} \cdot \left(-c \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi_2}\right) \cdot (-c) + \frac{d}{d \xi_2}\left(-c \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi_2}\right) \cdot c$$

$$= c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} - c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} - c \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2}$$

$$\frac{d^2 u}{d x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u}{\partial \xi_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u}{\partial \xi_2}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2}$$

Η εξίσωση κύματος:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = -4c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = 0 \Rightarrow u = f(\xi_1) + g(\xi_2)$$

$$\Rightarrow u = f(x - ct) + g(x + ct)$$

ΠΑΡΑΔ: $Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = D$

Εξίσ. θερμότητας:

$u_t = u_{xx} \Rightarrow u_t - u_{xx} = 0$ ή $u_{xx} - u_t = 0$

$A = -1, \quad B = C = D = 0$

$\frac{dt}{dx} = \frac{0 \pm \sqrt{0-0}}{-2} = 0 = \lambda$ μια πραγματική ρίζα: η εξίσ. είναι παραβολική

Μόνο μία χαρακτηριστική:

$\frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow \xi_1 = t$

Εξίσωση Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = \nabla^2 u = 0$

$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad D = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{0 \pm \sqrt{0-4}}{2}$ μιγαδικές ρίζες

ελλειπτικού τύπου

Χαρακτηριστικές είναι μιγαδικές:

$\xi_1 = x - iy$

$\xi_2 = x + iy$

ΔΕΝ μπορώ να χρησιμοποιήσω τη μέθοδο χαρακτηριστικών!

ΠΑΡΑΔ.: $i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |u|^2 u = 0$

η μη-γραμμική εξίσωση Schrödinger

$|u|^2 = u\bar{u}$

Βαθιά ύδατα - οπτική

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

Εξίσωση Korteweg - deVries (kdV)

αβαθή ύδατα

πλοίσμα

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} u^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2} + u_{xx}\right) = 0$$

Θεωρώ λύσεις που μηδενίζονται στα $|x| \to \infty$ κ. οι παράγωγοι επίσης είναι μηδέν.

Ολοκληρώνω:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{dt} dx + \underbrace{\left(\frac{u^2}{2} + u_{xx}\Big|_{-\infty}^{+\infty}\right)}_{0} = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} u\,dx = 0} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} u\,dx = C = \text{σταθερή}$$

αυτό ισχύει για ΟΛΕΣ τις λύσεις!

άπειρα σημεία όπου χρονική παράγωγος $= 0$

Μπορώ να βρω άλλα τέτοια ?

ΝΑΙ! Άπειρα κιόλας.

Μπορώ να κάνω το ίδιο κ. στην 1η εξίσωση?

↳ Έχουμε 2 εξισώσεις:

$$\left.\begin{aligned} i\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |u|^2 u &= 0 \\ -i\cdot\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + |u|^2 u &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Τι λείπει για να γίνουν πραγματ. ?

$$\left.\begin{aligned} i\cdot u_t\bar{u} + u_{xx}\bar{u} + |u|^2 &= 0 \\ -i\cdot\bar{u}_t u + \bar{u}_{xx} u + |u|^2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Big\downarrow (+)$$

$$i\cdot\underbrace{(u_t\bar{u} + \bar{u}_t u)} + (u_{xx}\bar{u} - \bar{u}_{xx}u) = 0$$

$$i\cdot\frac{\partial}{\partial t}(u\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x}(u_x\bar{u} - \bar{u}_x u) = 0$$

Ολοκληρώνω ως προς x:

$$i\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}|u|^2\,dx + \left(u_x\bar{u} - \bar{u}_x u\Big|_{-\infty}^{+\infty}\right) = 0$$

$$\Rightarrow i\cdot\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}|u|^2\,dx = 0 \quad \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}|u|^2\,dx = C = \text{σταθ.}$$

Τι κοινό έχουν τα δύο αποτελέσματα?

Νόμοι διατήρησης

→

Νόμοι διατήρησης
(conservation laws)

Μια εξίσωση της μορφής: $\frac{\partial}{\partial t}T(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}F(x,t) = 0$

ονομάζεται νόμος διατήρησης

T : πυκνότητα (density)

F : ροή της διατηρήσιμης ποσότητας (flux)

Τότε για τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} T\,dx + F\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} T\,dx = 0$$

αν $F(+\infty, t) - F(-\infty, t) = 0$

Δηλ. η ποσότητα $\int_{-\infty}^{+\infty} T\,dx$ διατηρείται στον χώρο

ΠΑΡΑΔ: $u_t + u_{xxx} = 0$ (η γραμμική kdV)

Ορίζω $T = u$

$F = u_{xx}$

$$\frac{\partial}{\partial t}T + \frac{\partial}{\partial x}F = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} T\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u\,dx = \text{σταθ.}$$

Επίσης μπορώ ν.δ.ο. $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2\,dx = \text{σταθ.}$

Πολ/σιάζω την εξίσωση με u:

$$u u_t + u_{xxx} \cdot u = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\frac{u^2}{2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x^2}{2} - u u_{xxx}\right) = 0 \longrightarrow$$

Ορίζω $T = \frac{u^2}{2}$, $F = \frac{u_x^2}{2} - u u_{xxx}$

Προφανώς $\int_{-\infty}^{+\infty} T\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2}{2}\,dx = \sigma\tau\alpha\vartheta.$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} u^2\,dx = \sigma\tau\alpha\vartheta.$

$\int_{-\infty}^{+\infty} u\,dx = \sigma\tau\alpha\vartheta.$

ΑΠΟΔ.:

$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} u\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} -u_{xxx}\,dx$

$= -u_{xx}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$

Πώς ξέρω ότι η συνάρτηση είναι ομοιόμ. συνεχής ε.ω. να περάσω την παράγωγο μέσα στο ολοκλ.? (Δες ορισμό ομοιόμ. συν.)

Στη συνέχεια πάμε ΣΗΜΕΙΑΚΑ !!